

湍流计算的多尺度模型与尺度间相互作用规律*

高 智

中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100080

摘要 湍流计算的多尺度模型把物理(空间)尺度分为大小尺度, 大小尺度(LSS)运动微分积分方程组通过湍流应力项相耦合. 利用该方程组计算了不可压槽道和平面混合层流动的三维时间演化, 同时算出平均流速、最大和平均脉动速度. 平均速度和平均脉动速度与 NS 计算结果一致, NS 计算未能算出最大脉动速度. 混合层最大脉动速度突增现象与流动转捩猝发现象相对应. LSS 方程计算中, 小尺度 l_{2f} 与大小涡分割尺度 l_c 之比约为 $1/2 \sim 1/4$ 时, 数值解很好收敛; $l_{2f}/l_c = 1/5$ 未能获得收敛解. 解析分析证实: 涡尺度介于 $l_c/3$ 和 l_c 之间的小涡(称作近程小涡)及介于 $l_c/2$ 和 l_c 之间的小涡(定义为共振小涡)分别提供了所有小涡对大涡作用应力的 90% 和 75%, 给出近程小涡和共振小涡作用应力的微分表达式; 获得微分形式的大小尺度封闭方程组及大尺度运动封闭方程组. 对单向剪切湍流, 共振作用应力公式简化为 Prandtl 混合长理论应力公式. 给出初步数值计算结果及湍流多尺度模型基本方程组的一般形式.

关键词 湍流 湍流多尺度模型 湍流近程相互作用 湍流共振相互作用

湍流的工程计算, 例如大涡模拟, 传统办法是在空间尺度范围(l_f, L)或波谱空间波数范围($k_f, 0$)进行“统一”的计算, 这里 l_f 和 L 分别是某一小尺度和流动的宏观特征长度, k_f 是某一高波数. 近年来又提出了湍流计算的多尺度模型^{[1-3][11]}. 多尺度模型在物理空间把尺度范围(l_f, L)分成小尺度(l_f, l_c)和大尺度(l_c, L)两个部分, 大和小尺度运动方程组通过湍流应力项关联在一起^{[1][11]}; 或利用物理空间的层次基元(hierarchical bases)和气泡(“bubbles”)技术获得多尺度变分有限元公式^[2]. 多尺度模型在波谱空间把波数范围($k_f, 0$)分成高波数(k_f, k_d)和低波数($k_d, 0$)两部分, 高和低波数方程通过对流项关联在一起^[3]. 多尺度波谱模型^[3]算出的均匀各向同性湍流衰变的统计特性与 DNS 在波数范围($2k_f, 0$)算出的特性很好相符, 比经典 Smagorisky 和动力学 Smagorisky 模型的

结果更靠近 DNS 解. 对不可压缩槽道流和平面混合层流动的时间演化特性, 多尺度方程组^[4, 5]算出的平均速度和平均脉动速度与 DNS 的结果很好相符, 但 NS 计算没有获得最大脉动速度. 在 LSS 方程组计算中, l_f 等于 $1/2 l_c, 1/3 l_c$ 和 $1/4 l_c$, 数值解很好收敛; 当 l_f 等于 $1/5 l_c$ 时, 未能获得收敛解. 对此文^[2]作了分析, 获得不同尺度间的近程作用规律, 并引入了尺度间共振相互作用的概念, 本文进一步探讨这些问题.

1 湍流计算的多尺度模型和大小尺度运动微分积分方程组

湍流计算的多尺度模型与传统的计算模型不同, 它把可分辨尺度范围(l_{2f}, L)划分为小尺度范围($l_{2f}, l_c = l_{1f}$)和大尺度范围(l_c, L)两部分^{[1-3][11]}, 或更多的小尺度范围($l_{mf}, l_{m-1, f}$)...

2003-02-28 收稿, 2003-05-12 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 10032050, 10272106)

E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

1) 高 智. 新的流体运动守恒方程组, 中国科学院力学所科技报告. IMCAS STR-92026, 1992

2) 高 智. 湍流大小涡相互作用的近程规律与应用(I 不可压缩流, II 可压缩流)中国科学院力学所科技报告. IMCAS STR-2001001 和 STR-2001002, 2001

($l_{2f}, l_{1f}=l_c$)和大尺度范围(l_c, L) m 部分,参见图 1. 可分辨尺度范围划分为两部分时多尺度模型的基本方程为大小尺度(LSS)运动方程组,对不可压缩流, LSS 方程组为^[11]:

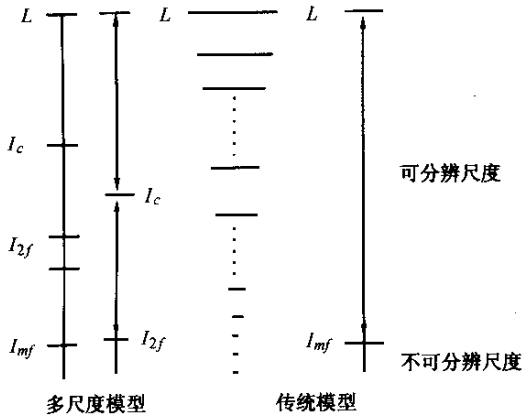


图 1 湍流计算模型示意图

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} + F_{ci}(u_i, U_{ci}), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i - U_{ci}) = 0, \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u_i - U_{ci}) + (u_j - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i - U_{ci}) = \\ - (u_j - U_{cj}) \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i - U_{ci}) - \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(p - P_c) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \cdot \\ (u_i - U_{ci}) - F_{ci}(u_i, U_{ci}), \end{aligned} \quad (2b)$$

其中

$$(U_{ci}, P_c) = \frac{1}{V_c} \int (u_i, p) dv, \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} F_{ci}(u_i, U_{ci}) = - \frac{1}{V_c} \int (u_j - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \\ (u_i - U_{ci}) dv, \end{aligned} \quad (3b)$$

其中 V_c 为粗网格体积, $V_c = \Delta x_c \Delta y_c \Delta z_c$, Δx_c ,

Δy_c 和 Δz_c 为粗网格间距, u_i ($i=1, 2, 3$) 和 p 为 Navier-Stokes (NS) 方程组解. 为了获得湍流 NS 解, 要求网格间距达到 Kolmogoroff 尺度 $LR_e^{-3/4}$ 大小, $Re = \frac{UL}{\nu}$ 为湍流宏观 Reynolds 数. 很显然, 在湍流多尺度模型 LSS 方程组的计算中, 若细网格间距大于 Kolmogoroff 尺度 $LR_e^{-3/4}$, 则 LSS 方程组 (1) 和 (2) 并不封闭. 文 (2) 从理论上解决了 LSS 方程组的封闭问题, 在 $\Delta x_{2f}/\Delta x_c = \Delta y_{2f}/\Delta y_c = \Delta z_{2f}/\Delta z_c$ 的条件下证明了

$$\begin{aligned} F_{fi}(u_i, U_{2fi}) = \frac{\Delta x_{2f}^2}{\Delta x_c^2} F_{ci}(u_i, U_{ci}) + \\ O(\Delta x_{2f}^2 \Delta x_c^2 \dots), \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} F_{cfi}(U_{2fi}, U_{ci}) = \left(\frac{1 - \Delta x_{2f}^2}{\Delta x_c^2} \right) F_{ci}(u_i, U_{ci}) + \\ O(\Delta x_c^4 \dots), \end{aligned} \quad (4b)$$

其中

$$\begin{aligned} F_{fi}(u_i, U_{2fi}) = - \frac{1}{V_{fV_f}} \int (u_j - U_{2fj}) \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i - U_{2fi}) dv, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} F_{cfi}(U_{2fi}, U_{ci}) = - \frac{1}{V_c} \int (U_{2fj} - U_{cj}) \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{2fi} - U_{ci}) dv, \end{aligned} \quad (5b)$$

F_{fi} 表示涡尺度介于 $LR_e^{-3/4}$ 和 l_{2f} 之间小涡对大涡 (涡尺度大于 l_{2f}) 的湍流应力分量, F_{ci} 是涡尺度介于 $LR_e^{-3/4}$ 和 l_c 之间小涡对大涡 (涡尺度大于 l_c) 的湍流应力分量, F_{cfi} 则表示涡尺度介于 l_{2f} 和 l_c 之间小涡对大涡 (涡尺度大于 l_c) 的湍流应力分量, 表 1 给出 $|F_{cfi}|/|F_{ci}|$ 和 $|F_{fi}|/|F_{cfi}|$ 随 $\Delta x_{2f}/\Delta x_c \cong l_{2f}/l_c$ 的变化.

表 1 $|F_{cfi}|/|F_{ci}|$, $|F_{2fi}|/|F_{cfi}|$ 随 $\Delta x_{2f}/\Delta x_c$ 的变化

$\Delta x_{2f}/\Delta x_c$	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.25	0.2	0.1
$ F_{cfi} / F_{ci} $	0.36	0.51	0.64	0.75	0.84	0.91	0.94	0.96	0.99
$ F_{2fi} / F_{cfi} $	1.78	0.96	0.56	0.33	0.19	0.10	0.06	0.04	0.01

1) 见第 1147 页脚注 1)

2) 见第 1147 页脚注 2)

由表 1 数据和(4)式可知:小涡(涡尺度小于 l_c)对大涡(涡尺度大于 l_c)的作用主要是涡尺度靠近 l_c 的小涡(简称近程小涡)的作用,当 l_{2f}/l_c 为 $1/4$, $1/3$ 和 $1/2$ 时,近程小涡对大涡作用的应力约占有小涡应力的 94% , 91% 和 75% ,因此湍流不同尺度间的相互作用主要是近程相互作用.利用(4)和(5)式,由方程组(1)和(2)获得湍流大尺度和涨落运动方程组,简称大小尺度(LSS)近似封闭微分-积分方程组

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} = 0, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_c}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} + F_{cfi}(U_{2fi}, U_{ci}), \quad (6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_{2fi} - U_{ci}) = 0, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(U_{2fi} - U_{ci}) + (U_{2fj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{2fi} - U_{ci}) = \\ & -(U_{2fj} - U_{cj}) \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{2fi} - U_{ci}) - \\ & \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{2f} - P_c) + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}(U_{2fi} - U_{ci}) - \\ & F_{cfi}(U_{2fi}, U_{ci}) - \frac{1}{12} \sum_j \sum_k \frac{\partial U_{2fk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{2fi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{2fj}^2, \end{aligned} \quad (7b)$$

导出方程组(7)时,假定了 $V_f/V_c = \Delta x_{2f}^2/\Delta x_c^2 \leq 1$.求解大小尺度微分积分方程组(6)和(7),需要给定初始条件和恰当的边界条件,在固壁上满足无滑移条件,即

$$U_{ci} = 0, U_{2fi} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

2 湍流不同尺度间的近程作用规律和大小尺度运动微分方程组

考虑涡尺度介于 l_{2f} 和 l_c 之间的近程小涡(这里 $l_{2f} \gg LR_e^{-3/4}$, l_c 约为 l_{2f} 的几倍),它们对大涡(涡尺度 $> l_c$)作用的湍流应力分量的微分表达式为¹⁾

$$F_{cfi}(U_{2fi}, U_{ci}) = -\frac{1}{12} \sum_{j=1} \sum_{k=1} \frac{\partial U_{2fk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{2fi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{cj}^2, \quad (9)$$

当 l_{2f} 很靠近 l_c 时,必然有 $U_{2fi} \rightarrow U_{ci}$,因此由(9)式推得

$$F_{cfi}(U_{ci}, U_{ci}) = -\frac{1}{12} \sum_{j=1} \sum_{k=1} \frac{\partial U_{ck}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{cj}^2, \quad (10a)$$

类似地当涡尺度小于 l_{2f} 但很靠近 l_{2f} 时,同样有

$$F_{fffi}(U_{2fi}, U_{2fi}) = -\frac{1}{12} \sum_{j=1} \sum_{k=1} \frac{\partial U_{2fk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{2fi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{2fj}^2. \quad (10b)$$

比较湍流应力公式(9)和(10)可知,需要引入共振小涡(涡尺度十分靠近 l_c)的概念¹⁾,以便与近程小涡相区别,共振小涡对大涡作用的湍流应力分量由(10)式给出.利用(9)和(10)式我们给出近似封闭的大小尺度运动微分方程组

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} = 0, \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{ci} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_c}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} - \\ & \frac{1}{12} \sum_{j=1} \sum_{k=1} \frac{\partial U_{2fk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{2fi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{cj}^2, \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_{2fi} - U_{ci}) = 0, \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(U_{2fi} - U_{ci}) + (U_{2fj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{2fi} - U_{ci}) = \\ & -\frac{\partial}{\partial x_i}(P_{2f} - P_c) - (U_{2fj} - U_{cj}) \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} \\ & - U_{cj} \frac{\partial}{\partial x_j}(U_{2fi} - U_{ci}) + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 (U_{2fi} - U_{ci})}{\partial x_j \partial x_j} + \\ & \frac{1}{12} \sum_{j=1} \sum_{k=1} \frac{\partial U_{2fk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{2fi}}{\partial x_k \partial x_j} (\Delta x_{cj}^2 - \Delta x_{2fj}^2). \end{aligned} \quad (12b)$$

由大小尺度运动微分积分方程组(6)和(7)以及大小尺度微分方程组(11)和(12)可知:影响大涡运动的湍流应力主要来自近程小涡的贡献;影响近程小涡脉动运动的湍流应力主要来自大涡的贡献,更小涡(涡尺度 $\leq l_{2f}$)的贡献比较次要,大涡的贡献比更小涡的贡献大 $\Delta x_c^2/\Delta x_{2f}^2$ 倍.这些结论与文献[6,7]处理湍流DNS数据库得到的结论一致,由

1) 见第 1147 页脚注 2)

此可以推断,在湍流计算的 m ($m \geq 3$) 尺度 (L, l_c), (l_c, l_{2f}), \dots , (l_{m-1f}, l_{mf}) 模型中 (这里 $L^2 \gg l_c^2 \gg l_{2f}^2 \gg \dots \gg l_{mf}^2$), 影响 (l_{nf}, l_{n+1f}) 级小涡涨落运动的湍流应力,主要来自尺度介于 l_{n-1f} 和 l_{nf} 之间小涡的贡献,参见附录.

利用共振作用湍流应力公式 (10a), 可以获得近似封闭的大涡运动微分方程组¹⁾:

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} = 0, \quad (13a)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_c}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{12} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U_{ck}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{cj}^2, \quad (13b)$$

这里应该指出:对单向剪切湍流,共振小涡湍流应力简化为 $\frac{1}{12} \rho \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Delta y_c^2$, 该式与 Prandtl 混合长理论的湍流应力公式^[8]一致,混合长 l_p 与 Δy_c 的关系为 $l_p^2 = \frac{1}{24} \Delta y_c^2$. 但共振湍流应力和混合长湍流应力两者有概念上的不同,前者为近程后者为远程相互作用的结果.混合长 l_p 为经验长度,而网格间距 Δy_c 则是确定的长度,湍流多尺度模型中网格间距 Δy 与 Prandtl 混合长 l_p 的这种关系,进一步说明网格设计在湍流计算中的重要作用,网格间距的选择应以湍流本身的特征尺度为依据.

3 数值算例

利用湍流大小尺度 (LSS) 微分积分方程组 (6) 和 (7) 数值求解了不可压缩槽道流动和平面混合层流动的三维时间演化^[4,5] (1)~(4), 槽道流用差分 and 拟谱杂交算法、混合层流动则用拟谱方法进行计算. 对二维槽道流动,选取如下初始条件

$$(U_c, V_c) = (1 - y^2, 0), U_{2f} - U_c = \epsilon \tilde{u}, \\ V_{2f} - V_c = \epsilon \tilde{v}, \quad (14)$$

其中 \tilde{u}, \tilde{v} 为线性理论给出的对应于扰动波数 $\alpha = 1.0$ 的最不稳定模型, $\epsilon = 10^{-4}$, U_c, V_c, U_{2f} 和 V_{2f}

用 U_0 、时间 t 用 h/U_0 归一化,这里 U_0 为平均速度, h 为槽道半高度, $Re = hU_0/\nu$. P_c, U_{2f} 和 P_{2f} 在上、下游边界满足周期性条件,在上、下壁 ($y = \pm h$) 处 U_c 和 U_f 满足无滑移条件. 大小尺度方程组分别在粗和细网格下求解,例如对 $Re = 7500$, 粗细网格的网格点数分别为 32×32 和 128×128 . 粗细网格间距之比 $\Delta x_c/\Delta x_{2f} = 4$, 时间步长 $\Delta t = 0.0001$, 图 2 和 3 分别给出脉动速度 ($U_{2f} - U_c$), ($V_{2f} - V_c$)

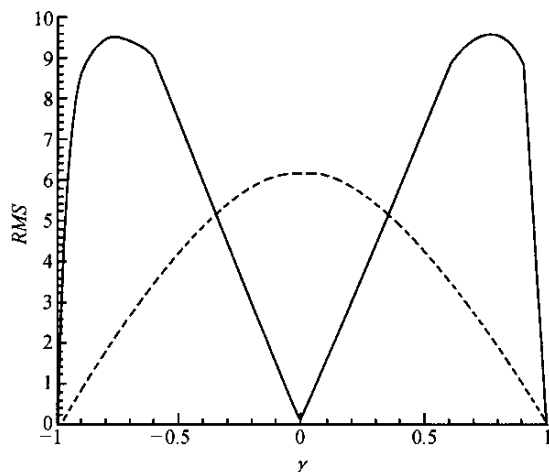


图 2 槽道流脉动速度方均根平均值 (RMS)

$$U' = (U_{2f} - U_c), \dots, V' = (V_{2f} - V_c)$$

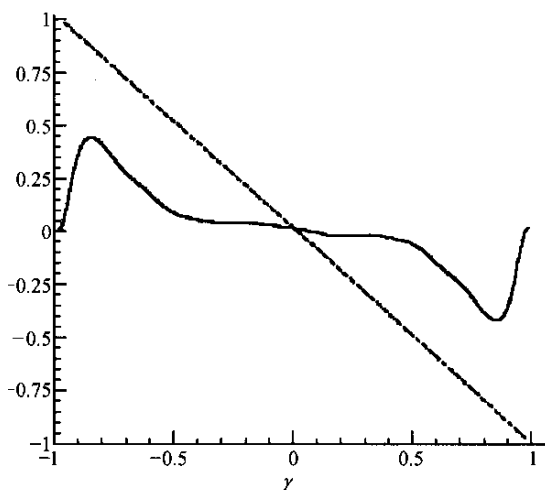


图 3 槽道流剪切湍流应力和总应力

$$-U'V' \dots -U'V' + Re^{-1} \frac{\partial U_c}{\partial y}$$

- 1) 彭世. 谱方法求解高庄方程以及 NS 方程和 SNS 方程在曲壁分离点邻域的数学特征分析. 中国科学院博士研究生学位论文, 1994
- 2) 王为国. 流体力学大小尺度 (LSS) 方程组的数值研究及与 Navier-Stokes 方程解的比较. 中国科学院力学研究所博士后研究报告, 1997.6
- 3) 申义庆. 广义扩散抛物化 NS 方程和大小尺度方程的数值研究. 中国科学院博士学位研究生学位论文, 2001
- 4) 高智. 湍流计算的新方法. 第三届海峡两岸计算流体力学讨论会文集. 台湾, 2002: 181~188

V_c) 和湍流应力和分子粘性应力分布曲线. 可见在整个流场中, 湍流应力和分子粘性应力处于同一数量级, 表明“二维”槽道湍流无法形成核心区, 这些结果与 NS 方程组的数值结果完全一致, 例如参见文献 [9].

对平面混合层流动的三维演化, 选取如下初始条件

$$\begin{aligned} (U_c, V_c, W_c) &= (U_0 \tanh(2\bar{z}) \delta \delta), \\ U_{2f} - U_c &= A_2 \sin \bar{x} \cos \bar{y} + A_3 \sin \bar{x} \cos \bar{y} \cos \bar{z}, \\ V_{2f} - V_c &= -A_2 \cos \bar{x} \sin \bar{y} - A_3 \cos \bar{x} \sin \bar{y} \cos \bar{z}, \\ W_{2f} - W_c &= 0, \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\delta_w^0} (x, y, z), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $A_2, A_3 = 10^{-4}$ 分别是二维和三维初始扰动的振幅. U_0 为两股来流的平均速度, 流速和时间 t 分别用 U_0 和 $T_0 = \delta_w^0 / U_0$ 归一化, δ_w^0 为初始涡量厚度, $Re = U_0 \delta_w^0 / \nu$. 为更好地分析 LSS 方程组解的性质、并与 NS 方程组数值解进行全面的比较, 对大小尺度(LSS)方程组和 NS 方程组的求解, 采用了同样的网格体系, 例如对 $Re = 10^2 \delta_w^0 / \nu$, 网格点数在 x, y 和 z 方向分别为 $32 \times 64 \times 128$. 一些典型结果如下: 平均速度、平均脉动速度、平均湍流应力与 NS 解的数值处理结果一致, 参见图 4~6. LSS 方程组计算同样提供了一些新结果, 例如给出最大脉动速度、最大湍流应力的变化与各自平均值的变化有明显不同, 出现了两次陡增; 出现陡增的时间和大小尺度运动之间能量的反传递时间段一致, 也与大尺度展向涡和肋涡卷起的时间段一致^{1)~4)}, 说明大小尺度运动之间的动量、能量交换是大尺度运动变化的主要物理起因. 平均动量厚度随时间的波动式增长现象是 NS 计算的一个熟知结果, 参见图 7, 但过去一直没有得到合理的物理解释^[10], LSS 方程的计算表明大小尺度运动之间能量正反传递是平均动量厚度波动式增长的物理起因. 最大脉动速度和最大湍流应力的突增显然与转捩流中的猝发(burst)现象相对应. 应该指出, 相应 NS 计算结果的数值处理并未得到最大脉动速度和湍流应力的两次突增^{[4][1]~4)}, 参见图 5 和 6.

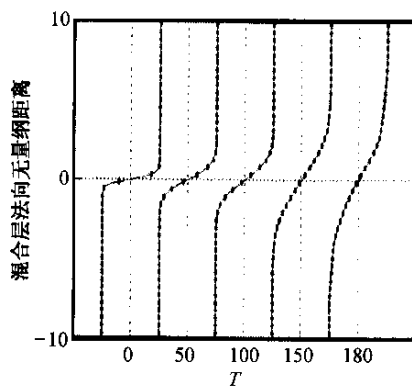


图 4 平面混合层流动平均速度剖面
—NS 方程,LSS 方程

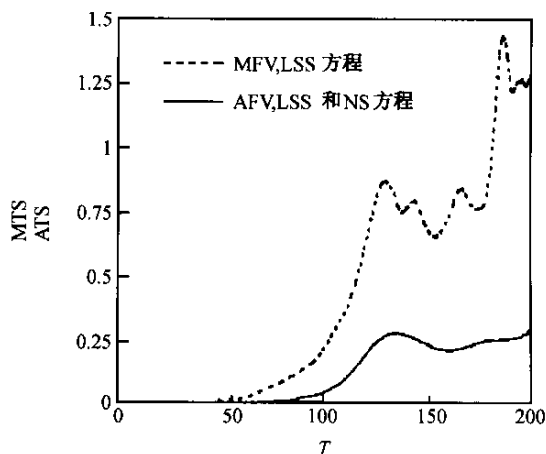


图 5 平面混合层流动平均脉动速度
(AFV) 和最大脉动速度(MFV)

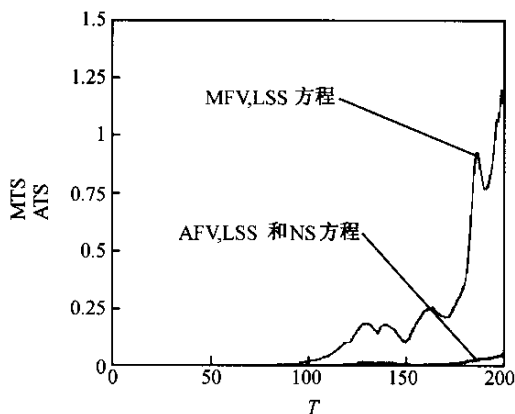


图 6 平面混合层流动平均湍流应力
(ATS) 和最大湍流应力(MTS)

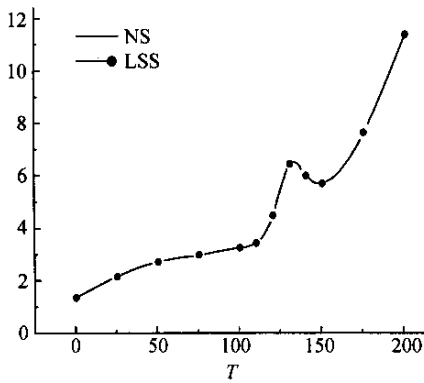


图7 平面混合层流动无量纲平均动量厚度

4 结束语

本文和文献[1~5], [1~5]的研究结果表明: 在可分辨尺度范围($l_{mf} \ll L, L$)内的湍流多尺度模型与在同一尺度范围内的传统湍流计算模型相比, 前者可以更好地反映湍流的非线性动力学特性, 给出一些后者算不出的结果. 从湍流多尺度模型出发导出的近程湍流应力张量的微分和积分表达式, 引入的共振相互作用概念, 以及导出的共振湍流应力张量的微分表达式; 不仅简洁地表达了湍流尺度间相互作用的近程特性, 且对湍流数值模拟具有参考和使用价值. 因此进一步发展湍流多尺度模型, 利用多尺度模型计算典型湍流(包括转捩流动)很必要和好处.

致谢 庄逢甘院士, 彭世镭、王为国和申义庆博士对本文的理论和数值方法均做出过不少贡献, 作者在此表示感谢.

附录 湍流计算的 m ($m \geq 3$) 尺度方程组

当空间尺度范围(L, l_{mf})被分为($L, l_{1f} = l_c$), (l_{1f}, l_{2f}), ...和(l_{m-1f}, l_{mf}) m 个尺度范围时, 这里 $m \geq 2$, 湍流多尺度、 m 尺度模型的基本方程组即为

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_{ci}}{\partial t} + U_{cj} \frac{\partial U_{ci}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_c}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 U_{ci}}{\partial x_j \partial x_j} + F_{mfci}(U_{mfi}, U_{ci}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (U_{nfi} - U_{n-1fi}) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (U_{nfi} - U_{n-1fi}) + (U_{nfi} - U_{n-1fi}) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \\ & (U_{nfi} - U_{n-1fi}) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (P_{nf} - P_{n-1f}) - \\ & (U_{nfi} - U_{n-1fi}) \frac{\partial U_{n-1fi}}{\partial x_j} - U_{n-1fi} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \\ & (U_{nfi} - U_{n-1fi}) + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 (U_{nfi} - U_{n-1fi})}{\partial x_j \partial x_j} + \\ & F_{mfni}(U_{mfi}, U_{nfi}) - F_{m(n-1)fi}(U_{mfi}, U_{n-1fi}), \quad (4) \end{aligned}$$

这里 $n = 2, \dots, m, m \geq 2$, 并约定使用如下记号: $U_{1fi} = U_{ci}, P_{1i} = P_c$. 由文[1]和本文的分析可知, 湍流应力 $F_{mfci}(U_{mfi}, U_{ci})$, $F_{mfni}(U_{mfi}, U_{nfi})$ 和 $F_{m(n-1)fi}(U_{mfi}, U_{n-1fi})$ 应当包括所有可分辨尺度、近程尺度和共振尺度三类应力, 它们的具体表达式是:

$$\begin{aligned} F_{mfci}^a(U_{mfi}, U_{ci}) &= -\frac{1}{V_c} \int (U_{mfj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \\ & (U_{mfi} - U_{ci}) \, dv, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{m(n-1)fi}^a(U_{mfi}, U_{n-1fi}) &= -\frac{1}{V_{n-1f}} \cdot \\ & \int_{V_{n-1f}} (U_{mfj} - U_{n-1fj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{mfi} - U_{n-1fi}) \, dv, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{mfni}^a(U_{mfi}, U_{nfi}) &= -\frac{1}{V_{nf}} \int (U_{mfj} - U_{nfi}) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \\ & (U_{mfi} - U_{nfi}) \, dv, \quad (7) \end{aligned}$$

$$F_{mfni}^a(U_{mfi}, U_{mfi}) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_{2fci}^n(U_{2fi}, U_{ci}) &= -\frac{1}{V_c} \int (U_{2fj} - U_{cj}) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \\ & (U_{2fi} - U_{ci}) \, dv, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n(n-1)fi}^n(U_{nfi}, U_{n-1fi}) &= -\frac{1}{V_{n-1f}} \cdot \\ & \int_{V_{n-1f}} (U_{nfi} - U_{n-1fi}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{nfi} - U_{n-1fi}) \, dv, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{m(n-1)fi}^n(U_{mfi}, U_{m-1fi}) &= -\frac{1}{V_{m-1}} \cdot \\ & \int_{V_{m-1}} (U_{mfj} - U_{m-1fj}) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{mfi} - U_{m-1fi}) \, dv, \quad (11) \end{aligned}$$

$$F_{m(n-1)fi}^n(U_{mfi}, U_{mfi}) = 0, \quad (12)$$

和

$$\begin{aligned} F_{mfci}^{ad}(U_{mfi}, U_{ci}) &= \\ & -\frac{1}{12} \sum_j \sum_k \frac{\partial U_{mfk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{mfi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{cj}^2, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{m(n-1)fi}^{ad}(U_{mfi}, U_{n-1fi}) &= \\ & -\frac{1}{12} \sum_j \sum_k \frac{\partial U_{mfk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{mfi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{n-1fi}^2. \quad (14) \end{aligned}$$

$$F_{mfmf}^{ad}(U_{mfi}, U_{nfi}) = -\frac{1}{12} \sum_j \sum_k \frac{\partial U_{mfk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{mfi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{nfi}^2, \quad (15)$$

$$F_{2fci}^{nd}(U_{2fi}, U_{ci}) = -\frac{1}{12} \sum_j \sum_k \frac{\partial U_{2fk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{2fi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{ci}^2. \quad (16)$$

$$F_{mfmf(m-1)f}^{nd}(U_{mfi}, U_{m-1fi}) = -\frac{1}{12} \sum_j \sum_k \frac{\partial U_{mfk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{mfi}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{m-1f}^2, \quad (17)$$

$$F_{sfj}^r(U_{sf}, U_{sf}) = -\frac{1}{12} \sum_j \sum_k \frac{\partial U_{sfk}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_{sfj}}{\partial x_k \partial x_j} \Delta x_{sfj}^2, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

其中 $(U_{ni}, U_{nf}) = -\frac{1}{V_{nf}} \int (u_i, p) dV$.

湍流应力 F 的上角标 a, n 和 r 分别表示所有可分辨尺度、近程尺度和共振尺度应力。需要指出：共振尺度应力公式为微分形式；而所有可分辨尺度和近程尺度的应力公式为积分形式或为微分形式，为积分形式时，有 $F_{mfmf}^a = F_{mfmf}^n = 0$ ，这表示不可分辨尺度对可分辨尺度最小尺度级“涡”的湍流阻尼为零，这显然与物理实际不符、是过分粗糙的近似。一些改进的办法是：(i) 用共振应力公式 F_{mfmf}^r 代替 F_{mfmf}^a 或 F_{mfmf}^n ；(ii) 用最小半尺度应力 $F_{mfmf(m-1/2)f}$ 代替积分形式的 F_{mfmf}^a 或 F_{mfmf}^n ，这里

$$F_{mfmf(m-1/2)f} = -\frac{1}{V_{(m-1/2)f}} \int_{v_{m-1/2}} \left(U_{mfi} - \frac{1}{2} (U_{mfi} + U_{(m-1/2)fi}) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_{mfi} - \frac{1}{2} (U_{mfi} + U_{(m-1/2)fi}) \right) dv;$$

(iii) 引入大涡模拟 (LES) 中的亚格子尺度 (SGS) 应力模型。应当指出：不可分辨尺度对可分辨尺度作用的上述 (i)~(iii) 三种应力仅仅作用于可分辨尺度的最小尺度 (l_m, l_{m-1})，而对可分辨尺度的其他尺度 (l_{m-1}, L) 范围无作用；这与传统大涡模拟 (LES) 思想显然不同，在传统 LES 方法中，SGS 应力对可分辨尺度的整个尺度范围 (l_m, L) 产生作用。

由上述诸公式可知，当 $m=2$ 时，多尺度方程 (1)~(4) 简化为大小尺度积分-微分方程组 (6)~(7) 和大小尺度微分方程组 (11) 和 (12)。由湍流多尺度模型基本方程组 (1)~(4) 可知，影响 n 级小涡运动的湍流应力主要来自于尺度比它大的 ($n-1$) 级小涡的贡献，($n+1$) 级更小涡的贡献比较次要；($n+1$) 级小涡贡献的湍流应力是涡粘性，而 ($n-1$) 级小涡贡献

的湍流应力则为“负粘性”；它对 n 级小涡的涨落运动具有“激发”作用。惯性相互作用把动量和能量逐级传输给较小尺度的涡、而粘性耗散作用则把各级尺度涡的一部分能量转化为热能。在 $\Delta x_{n+1f}/\Delta x_{nf} = \Delta x_{n+1f}/\Delta y_{nf} = \Delta z_{n+1f}/\Delta z_{nf}$ 的条件下， n 级小涡湍流应力与大涡湍流应力之比为 $\Delta x_{n+1f}^2/\Delta x_c^2$ ，若 $\Delta x_{n+1f}/\Delta x_{nf} = 1/4$ ，则二、三和四尺度湍流模型的 $\Delta x_{mf}^2/\Delta x_c^2$ 为 $1/16, 1/256$ 和 $1/(16 \times 256)$ ，由此可见粘性耗散作用随涡尺度减小变得越来越重要。为了保证多尺度模型能够合理描述湍流的非线性特征，粘性耗散在最小尺度级占优是一个必要条件。由 $\Delta x_{mf}^2/\Delta x_c^2$ 数值大小的上述比较知道，对于二维槽道湍流的三维演化，由于大涡运动方程中分子粘性应力与湍流应力为同一数量级，参见文中图 3，因此，二尺度、最多三尺度模型已能较好地反映二维槽道湍流的非线性动力学特性。而对大涡运动方程中湍流应力很大于分子粘性应力的那些湍流，则需要三尺度、四尺度甚至更多尺度模型才能较好地描述湍流的非线性动力学特性。

参 考 文 献

- 1 Gao Z, et al. Time-space scale effects in computing flow and a new approach to flow numerical simulation. Lecture Notes in Physics, 1995, 256
- 2 Hughes T J R, et al. Large eddy simulation and the variational multiscale method, Comput Visual Sci, 2000, 3: 47
- 3 Hughes T J R, et al. The multiscale formulation of large eddy simulation: Decay of homogeneous isotropic turbulence. Phys Fluids, 2001, 13(2): 505
- 4 Wang W G, et al. A Numerical comparison of the large and small scale (LSS) equations with the Navier-Stokes equations: The three-dimensional evolution of a planar mixing layer flow. In: Proc. of 7th Beijing International Symposium on Computational Fluid Dynamics, International Academic Publishers, 1997. 484~490
- 5 王为国, 等. 平面混合层流动三维演化的展向尺度效应. 计算力学学报, 1996, 14(增刊): 58
- 6 Zhou Y, et al. Advances in the fundamental aspects of turbulence: Energy transfer, interacting scales and self-preservation in isotropic decay. Appl Mec Rev, 1998, 51(4): 267
- 7 Domarazki J A, et al. Subgrid-scale model based on the estimation of unresolved scales of turbulence. Phys Fluids, 1997, 9: 2148
- 8 周光, 等. 流体力学 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2000
- 9 Jimenez J. Transition to turbulence in 2-D Poiseuille flow. J F M, 1990, 218: 265
- 10 Moser K D, et al. The three-dimensional temporal evolution of a planar mixing layer flow. J F M, 1993, 273: 31